

## CAPÍTULO 7

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde  $0 < \theta < 1$ . Sabe-se que  $E(X) = (1-\theta)/\theta$ . Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se  $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$ .

- Obtenha uma estimativa para  $\theta$  pelo método dos momentos.
  - Determine o estimador de máxima verosimilhança para  $\theta$ .
  - Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
  - Reparametrize a distribuição em função de  $\mu = E(X)$ , e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
  - Mostre que  $T = \sum_{i=1}^{1000} X_i$  é estatística suficiente para  $\theta$ .
2. Pretende-se ter uma ideia da densidade do tráfego em certo local, entre as 8 e as 9 horas. Sabe-se que o número de veículos que aí passam durante esse período segue um processo de Poisson. Fizeram-se as seguintes 9 observações casuais:

$$(95, 100, 80, 70, 110, 98, 97, 90, 70).$$

- Obtenha o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para o número médio de veículos que passam naquele local.
  - Mostre que se trata de um estimador consistente e que é o mais eficiente.
  - Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança para a probabilidade de decorrerem pelo menos dois minutos sem passar qualquer veículo.
  - Mostre que  $\sum_{i=1}^n X_i$  é estatística suficiente para a média da população.
3. Considere uma variável aleatória  $X$  cuja distribuição depende dos parâmetros  $\alpha$  e  $\theta$ , para a qual se tem  $E(X) = \alpha\theta$  e  $\text{Var}(X) = \alpha\theta^2$ . Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve  $\sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$  e  $\sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$ , apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.

4. Num saco existem  $\theta$  bolas, numeradas de 1 a  $\theta$ . Extraíu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
- Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
  - Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para  $\theta$ .
  - Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.

5. Considere uma amostra casual de dimensão  $n$  retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}, \quad (-\theta < x < \theta), \quad \text{para } \theta > 0.$$

Calcule um estimador para  $\theta$  pelo método dos momentos.

6. Seja  $X$  uma variável aleatória discreta em que existe valor esperado e variância. Sabe-se que  $E(X) = 2\theta + 1$ , com  $\theta$  (parâmetro desconhecido) a verificar  $0 < \theta < 0.5$ .

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

- a) Determine um estimador para  $\theta$  pelo método dos momentos, e estude-o quanto a viesamento e consistência.
- b) Sabendo que a função de probabilidade de  $X$  é dada por:

$X$	0	1	2	3
$f(x \theta)$	$0.5 - \theta$	$\theta$	$0.5 - \theta$	$\theta$

Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para  $\theta$  com base na seguinte amostra casual de seis elementos: (1, 0, 2, 3, 2, 0).

7. O tempo que um aluno leva a responder a uma pergunta do exame é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$ . Numa amostra casual de 40 observações verificou-se um total de 480 minutos.
- a) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para  $\lambda$ .
- b) Determine a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de perguntas que são resolvidas em menos de 15 minutos.
- c) Se um exame tiver oito questões, obtenha uma estimativa para a probabilidade de as resolver todas, sabendo que a duração da prova é 2 horas.
8. Admite-se que o tempo de reparação de certo tipo de máquinas,  $X$ , segue uma distribuição normal de parâmetros desconhecidos. A fim de estimar esses parâmetros recolheu-se uma amostra aleatória de tempos de reparação (em minutos). Os dados são os seguintes:

$$n = 10, \sum_{i=1}^{10} x_i = 846 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 71607.$$

Estime a probabilidade do tempo de reparação de uma máquina ser inferior a 83 minutos.

9. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra casual retirada de uma população com função densidade

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\} \quad (x \in \mathbb{R}), \theta > 0.$$

- a) Calcule o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$ .
- b) Prove que a estatística

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

é um estimador não enviesado para  $\theta$  e, sabendo que  $E(X^4) = 3\theta^2$ , calcule a sua variância.

- c) Obtenha uma estatística suficiente para  $\theta$ .

10. A distância percorrida por um veículo pesado de mercadorias num dia de trabalho, em centenas de quilómetros, é uma variável aleatória,  $X$ , com média  $\mu = \theta + 2$ , variância  $\sigma^2 = \theta^2$  e distribuição dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}} \quad \text{para } x > 2, \text{ onde } \theta \text{ é um parâmetro desconhecido } (\theta > 0).$$

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

a) Mostre que o estimador de máxima verosimilhança para  $\theta$  é  $\hat{\theta} = \bar{X} - 2$  e analise a sua consistência.

b) Observada uma amostra casual de dimensão 50 obteve-se  $\sum_{i=1}^{50} x_i = 350$ .

Apresente, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a percentagem de dias de trabalho em que um veículo desse tipo percorre uma distância superior a 500 quilómetros.

11. Admite-se que o tempo de funcionamento, em milhares de horas, de determinada componente electrónica,  $X$ , tem distribuição  $G(3;1/\theta)$ , ou seja, a sua função densidade é dada por

$$f(x|\theta) = \frac{x^2 e^{-x/\theta}}{2\theta^3} \quad (x > 0), \theta > 0.$$

Com base numa amostra casual de dimensão  $n$ , definiram-se os seguintes estimadores para o parâmetro  $\theta$ :

$$T_1 = \frac{\bar{X}}{3} \text{ e } T_2 = \frac{n\bar{X} + 1}{3n}.$$

a) Estude o enviesamento e a consistência destes estimadores.

b) Qual dos estimadores tem menor erro quadrático médio?

c) Observada uma amostra casual de 10 componentes, registou-se um tempo médio de funcionamento, por componente, de 1600 horas. Calcule o estimador e a estimativa da máxima verosimilhança para  $\theta$ .

d) Analise os estimadores propostos quanto à suficiência.

12. Seja uma população com distribuição dada por

$$f(x|\theta) = 2\theta^2 x^{-3} \quad (x > \theta), \text{ para } \theta > 0,$$

e a seguinte amostra de dimensão 5: (15, 8, 10, 5, 17).

a) Compare as estimativas de  $\theta$ , obtidas pelos métodos dos momentos e da máxima verosimilhança.

b) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para a média da população.

13. Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \quad (0 < x < \theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para a média da população. Justifique.

14. Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade

$$f(x|\theta) = \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} \exp\left\{-\frac{x^{3/2}}{\theta}\right\} \quad (x > 0), \text{ para } \theta > 0.$$

a) Mostre que

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{3/2}}{n},$$

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

é o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$ .

- b) Sabendo que  $X^{3/2}$  tem distribuição exponencial de média  $\theta$ , estude o enviesamento e a consistência do estimador da alínea a).

15. Retirou-se uma amostra casual de dimensão  $n$  de uma população uniforme no intervalo  $(0, \beta)$ , onde  $\beta$  é um parâmetro positivo.

- a) Determine um estimador não enviesado para  $\beta$  e calcule a sua variância.  
b) Diga, justificando, se pode afirmar que o estimador calculado na alínea anterior é o mais eficiente.

16. Seja  $X$  uma população com função probabilidade

$$f(x|\alpha) = \alpha \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^{1-x} \quad (x = 0, 1), \text{ com } 0 < \alpha < 1.$$

- a) Determine o estimador da máxima verosimilhança para  $\alpha$ , e verifique se é centrado.  
b) Qual é a distribuição da variável aleatória  $X$ ?

17. Suponha-se que  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  é uma amostra casual retirada de uma população normal,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

- a) Mostre que

$$T_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$$

é um estimador centrado para  $\mu$ , e calcule a eficiência relativa desse estimador em relação ao estimador  $\bar{X}$ .

- b) Determine o valor de  $k$  de forma que

$$T_2 = k\{(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2 + (X_4 - X_3)^2\}$$

seja um estimador não enviesado para a variância da população.

18. São propostos os seguintes estimadores para a variância de uma população normal de média  $\mu$  conhecida:

$$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}, \quad T_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad \text{e} \quad T_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

- a) Analise-os quanto às seguintes propriedades: enviesamento, consistência e eficiência.  
b) Compare os EQM dos três estimadores.

19. Com base numa amostra aleatória de dimensão três,  $(X_1, X_2, X_3)$ , de uma população com distribuição exponencial, foram propostas as seguintes estatísticas para estimar a média:

$$T_1 = X_1, \quad T_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3} \quad \text{e} \quad T_4 = \bar{X}.$$

- a) Verifique que todos eles são estimadores não enviesados da média.  
b) Calcule a eficiência relativa entre os estimadores.  
c) Mostre que  $T_4$  é uma estatística suficiente.

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

20. Considere duas amostras casuais e independentes de dimensões  $n$  e  $m$ , de uma população de Poisson de média  $\lambda$ , e sejam  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  as respectivas médias amostrais. Sendo

$$T_1 = \frac{n\bar{X} + m\bar{Y}}{n + m} \text{ e } T_2 = \frac{1}{2}(\bar{X} + \bar{Y})$$

dois estimadores para  $\lambda$ , mostre que ambos são não enviesados, e determine qual deles é mais eficiente.

21. A altura máxima das ondas durante um ano, em determinado local, é uma variável aleatória com função densidade

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\} \quad (x > 0).$$

- Com base na amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , determine o estimador de máxima verosimilhança para  $\theta$ .
- Mostre que a quantidade de informação de Fisher é igual a  $1/\theta^2$ . (Nota:  $X^2$  tem distribuição exponencial com média  $2\theta$ ).
- Mostre que se trata de um estimador não enviesado, e investigue a sua eficiência.
- Admita que nos últimos 6 anos se observaram as seguintes alturas máximas:

3.1, 2.4, 2.6, 2.2, 1.9, 2.8.

Calcule uma estimativa para  $P(X > 3)$ .

22. Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade

$$f(x|\theta) = e^{-(x+\theta)} \quad (x > -\theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Com base na amostra casual  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  construíram-se as estatísticas

$$T_1 = -\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ e } T_2 = 1 - \bar{X}.$$

- Mostre que  $T_2$  é um estimador não enviesado e consistente de  $\theta$ .
- Verifique se  $T_1$  é um estimador consistente, mas enviesado, de  $\theta$ . Corrija o enviesamento.
- Compare o segundo estimador com o primeiro, corrigido do enviesamento.

23. De uma população com função probabilidade dada por

$$f(x|\theta) = \frac{2(1-\theta)^{x-1}\theta^{2-x}}{x(1+\theta)} \quad (x = 1, 2), \text{ para } \theta > 0,$$

retirou-se uma amostra casual de dimensão  $n$ .

- Deduza o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$ .
- Sabendo que

$$E(X) = \frac{2}{1+\theta} \text{ e } \text{Var}(X) = \frac{2\theta(1-\theta)}{(1+\theta)^2},$$

mostre que  $\bar{X}$  é o estimador da máxima verosimilhança para  $E(X)$ , e analise a sua consistência.

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

24. Classifique as afirmações apresentadas abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

- Com base numa amostra casual de dimensão  $n = 3$ , o estimador  $T = 0.5 X_1 + 0.4 X_2 + 0.1 X_3$ , sendo centrado é também o estimador mais eficiente para  $\mu$ .
- Comparar os Erros Quadráticos Médios de dois estimadores centrados (referentes ao mesmo parâmetro) equivale a comparar as respectivas variâncias.
- Um estimador consistente é sempre centrado.

25. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra casual de uma população com distribuição binomial de parâmetros 2 e  $\theta$ , ou seja,

$$f(x|\theta) = \binom{2}{x} \theta^x (1-\theta)^{2-x} \quad (x = 0, 1, 2), \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

- Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$ , e estude o seu enviesamento.
- Sabendo que  $\mathfrak{I}(\theta) = 2/\{\theta(1-\theta)\}$ , mostre que o estimador obtido na alínea a) é o mais eficiente para  $\theta$ .
- Com base numa amostra casual de 100 observações, onde se obteve

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 130,$$

deduza um intervalo de confiança a 95% para  $\theta$ , utilizando a distribuição assintótica dos estimadores da máxima verosimilhança.

26. Seja uma população com distribuição dada por

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left\{-\frac{|x|}{\theta}\right\} \quad (x \in \mathfrak{R}), \text{ para } \theta > 0,$$

da qual se obteve a seguinte amostra casual:  $(-2, 0.5, 2.5, -3.1, 2.1)$ . Sabe-se ainda que  $Y = |X|$  é uma variável aleatória com distribuição exponencial com desvio padrão igual a  $\theta$ .

- Obtenha uma estimativa para  $\theta$  pelo método dos momentos.
- Obtenha uma estimativa para  $\theta$  pelo método da máxima verosimilhança.
- Obtenha um intervalo de confiança a 95% para  $\theta$ .

27. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra casual de uma população com distribuição dada por

$$f(x|\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1} \quad (0 < x < 1), \text{ para } \theta > 1.$$

- Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$ .
- Mostre que o limite inferior para a variância dos estimadores não enviesados de  $\theta$  é  $\theta^2/n$ .
- Utilizando a distribuição assintótica dos estimadores da máxima verosimilhança, deduza um intervalo de confiança a 90% para  $\theta$ .

28. Na secção de enchimento de latas de tinta de um litro, procede-se a medições regulares para evitar grandes disparidades nos conteúdos das latas. A quantidade de tinta

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

---

(em litros) por lata segue uma distribuição normal com desvio padrão igual a 0.06. Numa amostra de 16 latas observou-se uma média de 0.95 litros.

- Obtenha uma estimativa da máxima verosimilhança para a proporção de latas com mais que um litro de tinta.
- Com base na informação da amostra, afirma-se que a quantidade média de tinta numa lata se situa entre 0.911 e 0.989 litros. Comente e diga qual a confiança a depositar nessa afirmação.
- Como procederia se quisesse reduzir para metade a amplitude do intervalo de confiança da alínea anterior?

29. O departamento de manutenção de uma empresa quer estabelecer um contrato de manutenção de máquinas. O tempo de reparação (em minutos) de cada máquina é uma variável aleatória  $X$ . Procedeu-se à recolha dos tempos de reparação de 10 máquinas escolhidas ao acaso, tendo obtido os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 850 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72610.$$

Com base nos dados recolhidos, e admitindo que o tempo de reparação tem distribuição normal, afirmou-se que o tempo médio de reparação por máquina se situava entre um mínimo de 79.4 e um máximo de 90.6 minutos. Qual a confiança a atribuir a essa afirmação?

30. Com base numa amostra casual com 16 observações, retirada de uma população normal, construiu-se, segundo o processo habitual, o seguinte intervalo de confiança para o valor esperado: (7.398, 12.602).
- Sabendo que, com a informação da amostra, se obteve  $s = 3.872$ , qual o grau de confiança que pode atribuir ao intervalo atrás referido?
  - Com base na mesma amostra, construa um intervalo de confiança a 95% para a variância da população.
  - Suponha que a verdadeira variância é 36. Se pretender construir um intervalo de confiança a 95% para a média, de modo que a respectiva amplitude não exceda 6.5, qual é a dimensão mínima da amostra a recolher?

31. Considere uma população com distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Dessa população foi retirada uma amostra casual de dimensão 25. Suponha que a amostra forneceu os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 75 \text{ e } \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 321.$$

- Construa um intervalo de confiança a 95% para a média.
- Construa um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão.

32. Seja  $X$  uma população normal com desvio padrão 1.5. Com base numa amostra casual de dimensão 25 seleccionada dessa população, construiu-se, pelo processo habitual, o seguinte intervalo de confiança para a média:

$$(\bar{x} - 0.6162, \bar{x} + 0.6162).$$

- Qual o grau de confiança deste intervalo?

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

- b) Qual deve ser a dimensão da amostra para diminuir para metade a amplitude do intervalo, para o mesmo grau de confiança?
33. Pode considerar-se que o grau de acidez do azeite de determinada marca é uma variável aleatória com distribuição normal.
- a) Analisada uma amostra de 16 garrafas, obteve-se para o grau de acidez uma média de 1.3 graus e uma variância corrigida de 0.16. Sabendo que essa marca garante, nos rótulos das embalagens do seu produto, um grau de acidez médio não superior a 1, diga, com base num intervalo de confiança a 95%, se pode acusar a empresa que comercializa a marca de publicidade enganosa?
- b) Supondo que o desvio padrão da população é igual a 0.4 graus, qual deve ser a dimensão da amostra a recolher de forma a garantir, com confiança de 99%, um desvio máximo de  $\pm 0.3$  graus entre a média observada e o seu verdadeiro valor?
34. De uma população normal foi retirada uma amostra casual de dimensão 15 tendo-se observado

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 30 \text{ e } \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 62.25.$$

- a) Determine um intervalo de confiança a 95% para a média da população.
- b) Com base na mesma amostra, e recorrendo à metodologia habitual, obteve-se o intervalo de confiança, (0.3082, 0.5851), para o desvio padrão da população. Qual o grau de confiança correspondente?
35. Pretendendo-se estabelecer algumas inferências sobre os consumos semestrais de cimento das empresas de artefactos e pré-fabricados na produção de determinado produto, agruparam-se as empresas em quatro classes, consoante as quantidades (em toneladas) de cimento compradas anualmente às cimenteiras:

classe I – [0, 650);                      classe III – [1200, 3000);  
classe II – [650, 1200);                  classe IV – [3000, 10 000].

Recolheram-se amostras casuais em cada classe relativas às quantidades de cimento utilizadas na produção de determinado produto. Obtiveram-se os seguintes resultados.

Classes	N.º de empresas na amostra	Consumo médio de cimento	Desvio padrão (s)
I	30	55	24.1
II	31	190	70.2
III	11	350	73.5
IV	8	940	389.3

Admita também que o consumo semestral de cimento na produção desse produto tem uma distribuição normal.

- a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média do consumo semestral de uma empresa da primeira classe de vendas.
- b) Com base num intervalo de confiança a 95% pode considerar-se que a dispersão da característica em estudo é semelhante para as empresas das segunda e terceira classes de vendas?

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

---

36. Uma empresa agrícola tem ao seu serviço dois tractores idênticos. O consumo de combustível, por hora de trabalho, em cada um deles é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros desconhecidos. Para efeitos de controlo de consumo, obtiveram-se ao acaso as seguintes amostras respeitantes aos tractores:

Tractor 1: 9.0, 9.5, 9.8, 9.4, 10.0, 10.2, 9.6, 9.7, 9.5;

Tractor 2: 10.0, 9.6, 9.9, 9.7, 10.1.

- Partindo do princípio de que não há razões para supor diferenças no desvio padrão do consumo nos dois tractores, construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias.
- Admitindo que as variâncias do consumo nos dois tractores são diferentes, construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias.
- Com base num intervalo de confiança a 90% para o quociente das variâncias, decida qual dos intervalos de confiança para a diferença de médias lhe parece o mais adequado.

37. Para comparar dois métodos de ensino, dividiu-se aleatoriamente uma turma de 22 alunos em dois grupos iguais. Cada grupo foi ensinado com um método diferente (método *A* e método *B*) e, no fim da formação, foram sujeitos à mesma prova de avaliação. Os resultados da avaliação, numa escala de 0 a 100, foram os seguintes:

Método *A*:  $\bar{x}_A = 74.8$ ;  $s_A'^2 = 81.5$ .

Método *B*:  $\bar{x}_B = 72.1$ ;  $s_B'^2 = 110.5$ .

Admita que as classificações obtidas em cada grupo têm distribuição normal.

- Construa um intervalo de confiança a 95% para o quociente das variâncias dos dois grupos.
- Tendo em conta o resultado da alínea anterior, construa um intervalo de confiança a 99% para a diferença de médias. Interprete o resultado obtido.

38. Classifique as afirmações apresentadas abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

- Algumas variáveis fulcrais podem ser estimadores.
- Se  $(14.3, 15.7)$  for um intervalo de confiança a 95% para  $\mu$  é legítimo escrever  $P(14.3 < \mu < 15.7) = 0.95$ .
- Fixada a dimensão da amostra e recorrendo ao método habitual, quanto menor a confiança, maior a precisão do estimador por intervalos para a média de um universo normal de variância conhecida.
- Recorrendo ao procedimento habitual em universos normais, pode-se garantir que os intervalos de confiança para  $\sigma^2$  são simétricos em torno de  $s'^2$ .

39. Para se estudar a regularidade de uma dada moeda fizeram-se 500 lançamentos, tendo-se observado 280 “faces”. Obtenha uma estimativa por intervalo de confiança, a 95%, para a probabilidade de sair “face”. O que pode concluir sobre a regularidade da moeda?

40. Uma cadeia de televisão fixou como objectivo ter uma audiência, para a telenovela XYZ, de pelo menos 55% dos telespectadores. Consultada uma empresa de audio-

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

---

metria, ficou estabelecido que semanalmente a empresa interrogaria por telefone, dentro do horário da novela, uma amostra casual de 200 telespectadores e registaria quantos estavam a ver a referida novela. Em determinada semana obtiveram-se 90 respostas positivas. Construa um intervalo de confiança a 95% para a percentagem de telespectadores da telenovela XYZ nessa semana. Com base neste intervalo, diga o que pode concluir sobre o cumprimento do objectivo fixado.

41. Numa amostra de 200 indivíduos que utilizam o automóvel nas suas deslocações casa-emprego, 50 declaram-se disponíveis para passar a utilizar o metropolitano caso este passasse a chegar à sua zona de residência. Com base nos resultados apresentados:
  - a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a verdadeira proporção de indivíduos nessas condições.
  - b) Qual deve ser a dimensão da amostra a recolher para reduzir a amplitude desse intervalo a metade, mantendo o mesmo grau de confiança?
42. Com o advento das novas tecnologias de informação (*software*, multimédia, *internet*, etc.) são, naturalmente, questionados os métodos tradicionais de ensino. Em experiências realizadas utilizando metodologias mais apelativas, com um grupo de 64 alunos, observou-se uma taxa de aprovação de 65%, enquanto num grupo de igual número de alunos, e para as mesmas matérias mas pelos métodos tradicionais, se obteve uma taxa de aprovação de 50%.
  - a) Utilizando um intervalo de confiança adequado, com um nível aproximado de 90%, pode concluir-se que é urgente mudar os métodos de ensino?
  - b) Explícite os pressupostos de construção do intervalo de confiança da alínea anterior, e analise em que medida alterações no grau de confiança podem conduzir a opinião diferente.
43. Pretende obter-se uma estimativa para a proporção de utentes dos comboios da linha de Cascais que utilizam também o metropolitano para alcançar o seu destino final. Para tal inquiriram-se, ao acaso, 500 passageiros da referida linha dos quais 320 declararam utilizar também o metropolitano na sua deslocação.
  - a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a proporção de passageiros da linha de Cascais que são também utilizadores do metropolitano. Interprete o resultado obtido.
  - b) Caso se pretendesse conhecer aquela proporção com uma margem de erro não superior a 2%, para um grau de confiança de 90%, quantos passageiros deveriam ser inquiridos?
44. Pretende saber-se qual a proporção de consumidores do produto *A*. Para tal foram recolhidas amostras de 200 pessoas nas cidades *F* e *G*, tendo-se observado, respectivamente, 140 e 160 consumidores desse produto.
  - a) Determine, com um grau de confiança de 95%, a percentagem de consumidores do produto *A* na cidade *F*.

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

- b) Pode afirmar-se, com um grau de confiança de 99%, que o consumo do produto  $A$  é superior na cidade  $F$ ?
45. A empresa “Inbox4all” disponibiliza um serviço de correio electrónico para os seus clientes. Grande parte das reclamações recebidas na empresa relacionam-se com o tempo de espera até chegar à caixa de correio. Para estudar esta questão observou-se uma amostra casual de 100 observações, obtendo-se um tempo médio de 17 segundos e um desvio padrão de 6 segundos. Construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio de espera. Com base neste intervalo, diga se pode afirmar que este tempo médio não ultrapassa os 20 segundos.
46. Com o objectivo de comparar a autonomia (duração da carga da bateria, em horas) de dois modelos de telemóveis, recolheu-se a seguinte informação:

Modelo	N.º de aparelhos Observados	Duração da carga da bateria	
		Média	Desvio padrão corrigido
A	40	6.5	3.0
B	50	5.5	2.5

Com base num intervalo de confiança a 95% poder-se-á afirmar que não existem diferenças significativas entre os modelos testados, no que respeita à duração média da carga da bateria.

47. O número de componentes defeituosas produzidas diariamente por uma máquina segue um processo de Poisson. Em média essa máquina produz duas componentes defeituosas por dia (8 horas). Com o objectivo de substituir a máquina em causa, foi testada uma nova máquina. Nos 30 dias de teste, registou-se um total de 40 componentes defeituosas produzidas pela nova máquina. Admitindo que o número de componentes defeituosas produzidas diariamente por esta máquina também segue um processo de Poisson, determine um intervalo de confiança a 95% para o número médio de componentes defeituosas produzidas diariamente por esta máquina, e interprete o resultado.
48. Deduza um intervalo de confiança a 95% para o parâmetro de uma distribuição uniforme,  $U(0, \theta)$ , com base numa amostra de dimensão 100.
49. Com o objectivo de avaliar o efeito da dimensão da turma sobre o aproveitamento dos alunos recolheu-se a seguinte informação (amostras casuais de alunos da mesma disciplina):

Classificação (0-20)	< 8	[8, 10)	[10, 12)	[12, 14)	≥ 14	Total
Turmas grandes	12	42	30	11	5	100
Turmas pequenas	4	30	40	21	5	100

- a) Construa um intervalo de confiança a 90% para a nota média dos alunos de turmas pequenas.
- b) Construa um intervalo de confiança a 90% para a diferença na classificação média das duas populações e comente o resultado obtido.

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

- c) Com base num intervalo de confiança a 90%, diga se pode afirmar que a proporção de alunos com nota positiva é maior nas turmas pequenas.
50. Uma empresa de distribuição de piza, ao estudar o intervalo de tempo (em minutos) entre chegadas de pedidos, obteve, em 50 observações, uma soma de tempos igual a 550 minutos. Admite-se que o tempo entre chegadas de pedidos segue uma distribuição exponencial.
- a) Obtenha uma estimativa, da máxima verosimilhança, para a  $P(X > 15)$ .
- b) Construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio entre pedidos, comentando se é razoável ser de 10 minutos esse intervalo de tempo.
51. O tempo de atendimento de uma pessoa no balcão do serviço pós-venda da loja “Pague e Leve” pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro  $\theta$ , ou seja,  $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ ,  $x > 0$ . Observada uma amostra casual de 10 pessoas atendidas nesse balcão, obteve-se um tempo médio de atendimento de 6.5 minutos.
- a) Calcule a estimativa da máxima verosimilhança para o desvio padrão da população.
- b) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para  $\theta$ .
52. Seja  $X$  uma população com distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$ .
- a) Retirada uma amostra casual de dimensão 1,  $X_1$ , determine o valor de  $k$  de modo a que o intervalo

$$\left(0, \frac{k}{x_1}\right)$$

seja um intervalo de confiança a 90% para  $\lambda$ .

- b) Recolheram-se de forma independente duas amostras casuais de dimensão 5 com médias  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$ , respectivamente. Tendo-se observado  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 6$ , obtenha um intervalo de confiança a 90% para o parâmetro  $\lambda$ .
53. Para a instalação de um parque eólico numa determinada região pretende-se estudar a velocidade mínima diária do vento nessa região (em km/h),  $X$ , que se admite ser uma variável aleatória com  $\mu = E(X) = 3\theta/2$ ,  $Var(X) = 3\theta^2/4$  e função densidade  $f_X(x|\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4}$  para  $x > \theta$ , em que  $\theta > 0$  é um parâmetro desconhecido.

Observada uma amostra casual de 200 dias obtiveram-se os seguintes resultados para a velocidade mínima diária do vento,

Média	Variância corrigida	Mediana	Mínimo	Máximo
5.19	51.81	3.78	3.05	64.40

- a) Deduza o estimador de  $\theta$  pelo método dos momentos. Calcule a respectiva estimativa e comente o resultado obtido.

SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 7

1. a) 0.5051; b)  $1/(1 + \bar{X})$ ; c) 0.98.
2. a) 90; c) 0.0498.
3. 0.00288, 24.06576.
4. a) 17; b) 13.
5.  $\sqrt{3 \sum_{i=1}^n X_i^2 / n}$ .
6. a)  $(\bar{X} - 1)/2$ ; b) 1/6.
7. a)  $1/\bar{X}$ ; b) 0.7135; c) 0.78.
8. 0.1977.
9. a)  $\sum_{i=1}^n X_i^2 / n$ ; b)  $2\theta^2 / n$ .
10. b) 0.549
11. b)  $T_1$ ; c)  $\bar{X}/3, 533.333$ .
12. a) 5.5, 5; b)  $2 \min(X_1, \dots, X_n)$ .
13.  $(2/3) \max(X_1, \dots, X_n)$ .
15. a)  $2\bar{X}, \beta^2/(3n)$ .
16. a)  $\bar{X}$ ; b)  $B(1, \alpha)$ .
17. a) 2/3; b) 1/6.
20.  $T_1$  se  $m \neq n$ , caso contrário coincidem.
21. a)  $\sum_{i=1}^n X_i^2 / (2n)$ ; d) 0.2452.
23. a)  $(2 - \bar{X})/\bar{X}$ .
24. a) F; b) V; c) F.
25. a)  $\bar{X}/2$ ; c) (0.5839, 0.7161) (aproximadamente) ou (0.6137; 0.6806).
26. a) 1.5659; b) 2.04; c) (0.996, 6.283).
27. a)  $\hat{\theta} = -n / \sum_{i=1}^n \ln(1 - X_i)$ ;  
c)  $[\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \hat{\theta} / \sqrt{n}, \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \hat{\theta} / \sqrt{n}]$  (aproximadamente) ou  
 $[\hat{\theta} \sqrt{n} / (z_{\alpha/2} + \sqrt{n}), \hat{\theta} \sqrt{n} / (-z_{\alpha/2} + \sqrt{n})]$ .
28. a) 0.2033; b) 0.9906.
29. 0.9793 ( $\approx 0.98$ ).
30. a) 0.98; b) (8.727, 38.306); c) 14.
31. a) (2.174, 3.826); b) (2.439, 7.742).
32. a) 0.96; b) 100.
33. a) (1.087, 1.513); b) 12.
34. a) (1.778, 2.222); b) 0.90.
35. a) (45.848, 64.152); b) (0.259, 2.151).
36. a) (-0.603, 0.150); b) (-0.555, 0.101); c) (0.472, 10.939).
37. a) (0.365, 5.044); b) (-9.186, 14.586).
38. a) F; b) F; c) F; d) F.
39. (0.516, 0.603).
40. (0.381, 0.519).

## Introdução à Estatística (3ª ed) - Exercícios

---

41. a) (0.19, 0.31) ; b) 800.  
42. a) (0.008, 0.292).  
43. a) (0.598, 0.680); b) 1692.  
44. a) (0.6365, 0.7635); b) (-0.2108, 0.0108).  
45. (15.818, 18.182).  
46. (- 0.1595, 2.1595).  
47. (0.920, 1.746).  
48. (1.797  $\bar{x}$ , 2.255  $\bar{x}$ ).  
49. a) (10.443, 11.237); b) (-1.624, -0.376); c) (-0.313, -0.087).  
50. a) 0.256; b) (8.490, 14.815).  
51. a) 6.5; b) (0.074, 0.263).  
52. a) 2.3026; b) (0.1809, 0.5235).  
53. a) 3.46; b) (4.192, 6.188).